CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

CAPÍTULO III

CURVATURA DE LAS SUPERFICIES

Líneas de curvatura.—Líneas asintóticas.—Líneas jeodésicas

La curvatura de una superficie, en uno cualquiera de sus puntos, está definida por la curvatura de todas las curvas que, sobre la superficie, pasan por este punto.

Sea una superficie S, M uno de sus puntos i AMB una curva cualquiera de la superficie. Llamemos α, β γ los cosenos directores de la tanjente MT a esta curva i λ, μ, ν los cosenos directores de la normal MN a la superficie S, en el punto M; se tiene

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0$$

Esta relacion tiene lugar en todos los puntos de la curva AB luego, se tendrá tambien, en estos puntos,

$$\alpha\, d\lambda + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu + \lambda\, d\alpha + \mu\, d\beta + \nu\, d\gamma = 0$$

Sean ahora λ', μ', ν' los cosenos directores de la normal principal MN' a la curva AB en el punto M i r su radio de curvatura; s el arco que separa el punto M de otro punto fijo i arbitrario de la curva, se tiene

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda'}{r}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu'}{r}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu'}{r}$$

Luego

$$\frac{\alpha\, d\lambda + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu}{ds} + \frac{\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'}{r} = 0$$

Sea todavía δ el ángulo NMN' de la normal a la superficie con la normal principal a la curva, se podrá escribir

$$(1) \qquad \frac{\alpha\, d\lambda + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu}{ds} + \frac{\cos\delta}{r} = 0$$

En esta fórmula el primer término no cambia cuando se sustituye a AB, otra curva cualquiera de la superficie que tenga la misma tanjente MT; luego para todas las curvas de la superficie que tienen una misma tanjente MT se tiene

$$\frac{\cos \delta}{r} = \text{const.} \tag{2}$$

De ahi resulta que el radio de curvatura r de la curva AB depende solo de la orientacion del plano osculador respecto de la normal a la superficie; por consiguiente *la seccion plana de la superficie S por el plano osculador de la curva AB, en M, tiene en este punto, la misma curvatura que la curva AB.*

Hagamos, una seccion de la superficie por el plano normal TMN i sea R su radio de curvatura en M; para esta seccion normal el ángulo δ será igual a cero i la fórmula (2) dará

$$\frac{\cos \delta}{r} = \frac{1}{R}$$

O bien

$$r = R \cos \delta \tag{3}$$

Está fórmula, debida a *Meusnier*, permite determinar el radio de curvatura de una curva cualquiera trazada sobre una superficie cuando se conoce el radio de curvatura de la seccion normal, tanjente a la curva.

CURVATURA DE LAS SECCIONES NORMALES

Para estudiar, la curvatura de las secciones normales en un punto M, se puede considerar solo una porcion infinitamente pequeña de superficie al rededor de M.

Elejimos entónces los ejes de coordenadas de tal manera que M sea el oríjen i MN el eje de las z, la ecuacion de una porcion infinitamente pequeña de superficie podrá ponerse bajo la forma

$$z=f(x, y)$$

i se tendrá, en el oríjen,

$$f(0, 0)=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0$$

Desarrollemos la funcion f segun la fórmula de Taylor i consideremos x, y como infinitamente pequeños de primer órden, se tendrá, al despreciar los infinitamente pequeños de tercer órden,

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right\}$$

El valor de z tiene por consiguiente la forma siguiente

$$z=Ax^2+2\,B\,xy+Cy^2$$

Es la ecuacion de un *paraboloide* referido a su vértice i a su eje. Así, cuando se desprecian los infinitamente pequeños del tercer órden respecto de las dimensiones lineales de una porcion de superficie, ésta coincide con un paraboloide determinado, tanjente, en su vértice, al elemento de superficie considerado. Llamarem̄os este paraboloide el *paraboloide osculador* de la superficie S, en el punto M.

De ahi resulta que la curvatura de las secciones normales en un punto dado, varía como la curvatura en el vértice, de las secciones de un paraboloide por planos que pasan por el eje.

Consideremos, por consiguiente, un paraboloide referido a su vértice i a sus planos principales; su ecuacion tiene la forma jeneral

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \tag{4}$$

Sea θ el ángulo de un plano ZMT con ZMX; tomemos sobre MT una lonjitud infinitamente pequeña MP i sea M' el punto del paraboloide que se proyecta en P; se tendrá segun (4),

$$M'P = \frac{\overline{MP}^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{p} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{q}\right)$$

Se sabe, por otra parte, que el radio de curvatura R de la curva considerada tiene por valor

$$R = \lim \frac{\overline{MP}^2}{2M'P}$$

Luego

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{p} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{q}$$

Sean R_1, R_2 los radios de curvatura de las secciones del paraboloide por los planos principales, se deducirá de la fórmula anterior

$$R_1 = p$$
$$R_2 = q$$

Luego

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_2} \tag{5}$$

Tal es por consiguiente la lei de variacion del radio de curvatura de las secciones normales en un punto de una superficie cualquiera.

Los radios de curvatura principales R_1, R_2, asi como los parametros p, q del paraboloide pueden tener un mismo signo o signos contrarios.

En el primer caso, el paraboloide osculador es *elíptico* i las dos secciones normales principales tienen su centro de curvatura a un mismo lado de la superficie; en el segundo caso el paraboloide osculador es *hiperbólico* i los centros de curvatura de las secciones principales estan a un lado i otro de la superficie; en este último caso el plano tanjente atraviesa la superficie i las tanjentes a la curva de interseccion son las jeneratrices rectilíneas del paraboloide osculador.

La interseccion del plano tanjente a la superficie S con un plano principal del paraboloide osculador se llama *direccion principal* en el punto M i el radio de curvatura de esta seccion normal correspondiente de la superficie se llama *radio de curvatura principal*.

Hai, por consiguiente, en cada punto de una superficie dos direcciones principales, a ángulo recto una de la otra i, a cada una, corresponde un radio de curvatura principal.

La fórmula (5) muestra que estos radios corresponden, uno al máximo, el otro al mínimo de R. Ademas si R' es el radio de curvatura de una seccion NMT' perpendicular a ZMT se tiene, segun (5)

$$\frac{1}{R'} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}$$

Luego

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Distribucion de las normales a una superficie al rededor de uno de sus puntos

Sea M el punto considerado; reemplazamos la porcion infinitamente pequeña de superficie al rededor de M por el paraboloide osculador, su ecuacion referida al eje i a las direcciones principales será

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$$

I los cosenos directores de la normal en un punto M' de coordenadas x, y, z seran

$$\frac{\lambda}{\frac{x}{R_1}} = \frac{\mu}{\frac{y}{R_2}} = \frac{\nu}{-1}$$

Hagamos

$$x = ds \cos\theta$$
$$y = ds \sin\theta$$

λ i μ seran infinitamente pequeños del órden de ds, luego si se desprecian los infinitamente pequeños de órden superior, se deberá reemplazar ν por uno; se tendrá por consiguiente

$$\lambda = -\frac{ds}{R_1}\cos\theta$$

$$\mu = -\frac{ds}{R_2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\nu = 1$$

Por otra parte, las ecuaciones de la normal son

$$\frac{X - ds\cos\theta}{-\frac{ds}{R_1}\cos\theta} = \frac{Y - ds\,\text{sen}\,\theta}{-\frac{ds}{R_2}\,\text{sen}\,\theta} = \frac{Z - z}{1}$$

Como z es infinitamente pequeño del segundo órden, se debe reemplazar por cero, luego se tendrá

$$X = ds\cos\theta\left(1 - \frac{Z}{R_1}\right)$$

$$Y = ds\,\text{sen}\,\theta\left(1 - \frac{Z}{R_2}\right)$$

La primera ecuacion es satisfecha, cualquiera que sean ds i θ, cuando

$$X = 0$$

$$Z = R_1$$

i la segunda, en las mismas condiciones, cuando

$$Y = 0$$

$$Z = R_2$$

Luego todas las normales, al rededor de un punto, encuentran dos rectas que pasan por los centros de curvatura de cada seccion principal i perpendiculares cada una a la seccion normal correspondiente.

Ahora, para que la normal en M' encuentre la normal en M, es necesario que se tenga a la vez

$$0 = ds \cos\theta \left(1 - \frac{Z}{R_1}\right)$$

$$0 = ds \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{Z}{R_2}\right)$$

De ahi se deduce

$$Z = R_1, \quad \cos\theta = 0$$

O bien

$$Z = R_2, \quad \cos\theta = 90^\circ$$

Como se ve, una primera condicion para que la normal en M' corte la normal en M es que M' se encuentre en uno de los planos principales de M; el punto de encuentro es entónces el centro de curvatura de la seccion en que se encuentra M'.

Caso particular

Supongamos que, en un punto de una superficie, uno de los radios principales de curvatura R_1 por ejemplo, estuviera infinito, entónces la ecuacion del paraboloide osculador se reduce a

$$Z = \frac{y_2}{2R_2}$$

Es la ecuacion de un *cilindro*.

Las ecuaciones de la normal en un punto infinitamente próximo del punto M son entónces

$$X = ds \cos \theta$$

$$Y = ds \operatorname{sen} \theta \left(1 - \frac{Z}{R_2} \right)$$

Para $\theta = 0$ esta normal es paralela a MN.

Recíprocamente si dos normales en dos puntos infinitamente próximos M i M' de una superficie son paralelas, el plano de las dos normales es un plano principal de curvatura i el radio de curvatura correspondiente es infinito.

Para demostrarlo basta elejir, como mas arriba, los ejes de coordenadas de tal manera que M sea el oríjen i la normal MN el eje OZ; supondremos que el eje OX está en el plano que pasa por M', entónces las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ deberán estar nulas en este último punto; sea $MM' = dx$ se tendrá

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + dx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + dx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right)_0 + \dots$$

Para que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean nulos en el punto M' es necesario que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0$ i $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right)_0$ sean nulos, luego el z de un punto cualquiera de la superficie, a distancia infinitamente pequeña de M, tendrá la forma

$$z = Cy^2$$

Es la ecuacion de un cilindro referido a sus planos principales, por consiguiente el plano NMM' es uno de los planos principales en el punto M.

Se ve que este caso se presenta en todos los puntos de una superficie desarrollable.

LÍNEAS DE CURVATURA

Consideremos, sobre una superficie, una curva tanjente, en cada uno de sus puntos, a una de las direcciones principales en este punto; esta curva se llama *línea de curvatura.* Como, en cada punto de una superficie, existen dos direcciones principales a ángulo recto una de otra, las líneas de curvatura formarán dos sistemas de curvas que cubrirán completamente la superficie i se cortarán a ángulo recto en cada punto de cruzamiento.

La determinacion de estas líneas sobre una superficie dada es ligada íntimamente con la curvatura misma de la superficie porque, en cada punto, las secciones normales, de curvatura máxima i mínima, estan precisamente dirijidas segun las líneas de curvatura.

Hemos visto mas arriba que las normales a una superficie, en dos puntos infinitamente próximos M i M', no se cortan jeneralmente i que la condicion necesaria para que ellas se corten era que el elemento MM' esté dirijido segun una de las secciones principales del punto M, luego *la propiedad característica de una línea de curvatura es que las normales a la superficie, en los puntos de esta curva, formen una superficie desarrollable.*

Sean x, y, z las coordenadas de un punto M de una superficie S; λ, μ, ν los cosenos directores de la normal MN a la superficie en este punto i X, Y, Z las coordenadas variables. Las ecuaciones de la normal MN son

$$(6) \qquad \begin{cases} X = x + \lambda\,\rho \\ Y = y + \mu\,\rho \\ Z = z + \nu\,\rho \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones pueden ser consideradas tambien como las ecuaciones de la superficie reglada, lugar jeométrico de las normales a la superficie S, en los puntos de una curva AB; entónces $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ son funciones del arco s de la curva AB; i estas funciones satisfacen a las relaciones

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0$$

Estas son análogas como se ve a las relaciones (13) del capítulo anterior.

Ahora, para que la curva AB sea una línea de curvatura, es necesario que las ecuaciones (6) representen una superficie desarrollable, luego se debe tener, segun las fórmulas (20) del capítulo anterior,

$$(7) \qquad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu} = -R$$

R representa, como se sabe, la distancia, al punto M, del punto de encuentro de la normal MN con la normal infinitamente próxima; en otros términos R es el radio de curvatura de la seccion principal tanjente a AB en el punto M.

Las fórmulas (7) no representan dos ecuaciones distintas porque la tercera fraccion es una consecuencia de las dos primeras; para averiguarlo basta multiplicar respectivamente los términos de cada fraccion por λ, μ, ν i sumar los numeradores i denominadores; las dos sumas son entónces nulas.

Líneas de curvatura de las superficies de revolucion

Consideremos una superficie de revolucion al rededor de OZ; la propiedad característica de la normal en un punto es de cortar el eje OZ, luego los cosenos directores λ, μ, ν de la normal satisfacen a la relacion

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y} = f(z)$$

De ahí se deduce

$$\lambda = x\, f(z)$$
$$\mu = y\, f(z)$$
$$d\lambda = f\, dx + x\, f'\, dz$$
$$d\mu = f\, dy + y\, f'\, dz$$

Las líneas de curvatura deben satisfacer a la relacion

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy}$$

Luego se debe tener

$$f + x f'\, \frac{dz}{dx} = f + y\, f'\, \frac{dz}{dy}$$

O bien

$$f'\, dz \left(\frac{x}{dx} - \frac{y}{dy} \right) = 0 \tag{8}$$

Una primera solucion es $dz = 0$; esta representa los paralelos; la otra solucion es

$$\frac{x}{dx} - \frac{y}{dy} = 0$$

O bien

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$Ly=Lx+LC$$

$$y=Cx$$

Es la ecuacion de los meridianos.

En resúmen, las líneas de curvatura de las superficies de revolucion son los paralelos i los meridianos.

Si $f'(z)$ estuviera nula o $f(z)$ constante la ecuacion (8) seria satisfecha cualesquiera que sean dx, dy, dz de suerte que todas las curvas de la superficie serian líneas de curvatura. Veamos cuál es entónces la naturaleza de esta superficie.

Escribamos su ecuacion bajo la forma

$$z=\phi(r)$$

Se tendrá

$$\frac{\lambda}{\phi'\frac{x}{r}}=\frac{\mu}{\phi'\frac{y}{r}}=\frac{\nu}{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+\phi'^2}}$$

O bien

$$\frac{\lambda}{x}=\frac{\mu}{y}=\frac{\phi'}{r\sqrt{1+\phi'^2}}$$

La última fraccion representa la funcion $f(z)$ cuyo valor es, por hipótesis constante; sea $\frac{1}{R}$ este valor, tendremos

$$\frac{\phi'}{r\sqrt{1+\phi'^2}} = \frac{1}{R}$$

O bien

$$\phi' = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Luego

$$\phi = -\sqrt{R^2 - r^2} + C$$

La ecuacion de la superficie es, por consiguiente,

$$(z - C)^2 + x^2 + y^2 = R^2$$

Es una *esfera*.

Se puede demostrar directamente que *la esfera es la única superficie sobre la cual todas las curvas son líneas de curvatura.*

En efecto, para que una curva cualquiera sea línea de curvatura, es necesario que las fracciones (7) conserven un mismo valor cualquiera que sea la orientacion, en el plano tanjente, del cambio de lugar dx, dy, dz. Ahora λ es una funcion de x, y, z se tiene

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \quad \frac{dz}{dx}.$$

El segundo miembro debe ser independiente de los valores de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, luego los coeficientes de estas fracciones deben ser nulos, lo que indica que λ debe depender solo de x. Se veria de la misma manera que μ debe depender solo de y i ν de z. Ahora para que las fracciones (7) sean iguales en todos los puntos de la superficie es evidentemente necesario que su valor comun sea una constante; en otros términos R debe ser constante i la integracion dará

$$x-a=R\lambda$$

$$y-b=R\mu$$

$$z-c=R\nu$$

Luego

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

La superficie es por consiguiente una *esfera*.

Líneas de curvatura de las superficies desarrollables

Sean

$$x=a+\alpha\rho$$

$$y=b+\beta\rho$$

$$z=c+\gamma\rho$$

las ecuaciones de una superficie desarrollable; se supondrá que las curvas $\rho=C^{te}$ son normales a las jeneratrices; entónces se tendrá

$$\frac{da}{d\alpha}=\frac{db}{d\beta}=\frac{dc}{d\gamma}$$

Sean λ, μ, ν los cosenos directores de la normal en un punto; estos cosenos satisfacen a las relaciones

$$\lambda\,\alpha+\mu\,\beta+\nu\,\gamma=0$$

$$\lambda\,\frac{d\alpha}{dt}+\mu\,\frac{d\beta}{dt}+\nu\,\frac{d\gamma}{dt}=0$$

De éstas se deduce

$$\alpha\,\frac{d\lambda}{dt}+\beta\,\frac{d\mu}{dt}+\gamma\,\frac{d\nu}{dt}=0$$

Por otra parte, se tiene tambien

$$\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}+\mu\,\frac{d\mu}{dt}+\nu\,\frac{d\nu}{dt}=0$$

$$\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}+\beta\,\frac{d\beta}{dt}+\gamma\,\frac{d\gamma}{dt}=0$$

Luego

$$\frac{d\lambda}{d\alpha}=\frac{d\mu}{d\beta}=\frac{d\nu}{d\gamma}$$

Las ecuaciones (7) dan entónces

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dy}{d\beta}=\frac{dz}{d\gamma}$$

Estas ecuaciones son satisfechas cuando $dt=0$ porque entónces los tres denominadores son nulos, luego las jeneratrices de la superficie son líneas de curvatura. Si dt no es nulo, las derivadas parciales de x, y, z respecto de t son proporcionales a $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ de suerte que las fracciones se reducen a

$$\frac{\alpha\, d\rho}{d\alpha} = \frac{\beta\, d\rho}{d\beta} = \frac{\gamma\, d\rho}{d\gamma}$$

Para que ellas sean satisfechas a la vez es necesario que $d\rho = 0$ i se encuentran las curvas $\rho = C^{te}$, normales a las jeneratrices.

En resúmen las líneas de curvatura de una superficie desarrollable son las jeneratrices i sus trayectorias octogonales.

PROPIEDADES JEOMÉTRICAS DE LAS LÍNEAS DE CURVATURA

Sea, como mas arriba, δ el ángulo de la normal a una superficie i de la normal principal a una curva trazada sobre ella, se tiene

$$\cos\,\delta = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$$

Luego, cuando se considera un cambio de lugar cualquiera sobre la curva,

$$-\,\text{sen}\ \delta .\, d\delta = (\lambda\, d\lambda' + \mu\, d\mu' + \nu\, d\nu') + (\lambda'\, d\lambda + \mu'\, d\mu + \nu'\, d\nu)$$

Si la curva es una línea de curvatura, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ son proporcionales a dx, dy, dz, luego el último término entre paréntesis es nulo i se tiene

$$-\,\text{sen}\ \delta .\, d\delta = \lambda\, d\lambda' + \mu\, d\mu' + \nu\, d\nu'$$

Ahora, las fórmulas (7) del capítulo I dan

$$\frac{d\lambda'}{ds} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\xi'}{\rho}$$

$$\frac{d\mu'}{ds} = -\frac{\beta}{r} + \frac{\eta'}{\rho}$$

$$\frac{d\nu'}{ds} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{\zeta'}{\rho}$$

α, β, γ son los cosenos directores de la tanjente a la curva i ξ', η', ζ' los de la binormal, r i ρ son los radios de curvatura i de torsion; tomando en cuenta estas fórmulas se obtiene

$$-\operatorname{sen}\delta\, d\delta = +\frac{ds}{\rho}(\xi'\lambda + \eta'\mu + \zeta'\nu)$$

Llamemos $d\phi$ el ángulo de los planos osculadores a la línea de curvatura en los estremos del arco ds i observamos que la paréntesis del segundo miembro es igual a $-\operatorname{sen}\delta$; tendremos simplemente

(9) $$d\delta = d\phi$$

A. OBRECHT

(Continuará)